

# ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

## ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2021

### ΘΕΜΑ 1

Για το σύνολο  $A = \{x \in \mathbb{Z} : -5 < x \leq \sqrt{2}\}$  ισχύει:

- a) Το A έχει μέγιστο στοιχείο αλλά δεν έχει ελάχιστο στοιχείο.
- b) Το A έχει ελάχιστο στοιχείο αλλά δεν έχει μέγιστο.
- c) Το A έχει μέγιστο στοιχείο και ελάχιστο στοιχείο.
- d) Το A δεν έχει μέγιστο στοιχείο ούτε έχει ελάχιστο στοιχείο.
- e) Το A έχει supremum αλλά δεν έχει infimum
- f) Το A έχει infimum αλλά δεν έχει supremum .
- g) Τίποτα από τα παραπάνω

### ΘΕΜΑ 2

Στο σύνολο  $\mathbb{Z}$  των ακεραίων αριθμών ορίζουμε την εξής σχέση ισοδυναμίας  $x \sim y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x - y = 4k$ . Τότε συμβολίζοντας με  $[x]$  την κλάση ισοδυναμίας ενός ακεραίου  $x$ , ισχύει:

- a)  $0 \in [3]$
- b)  $2 \in [18]$
- c)  $H \sim$  είναι αντισυμμετρική
- d)  $H [4],[7],[10],[121]$  είναι διαμέριση του  $\mathbb{Z}$
- e) Τίποτα από τα παραπάνω

### ΘΕΜΑ 3

Έστω  $K, L$  δύο φραγμένα μη κενά υποσύνολα του  $\mathbb{R}$  ώστε να ισχύει το εξής: « Για κάθε  $x \in K$  υπάρχει  $y \in L$  ώστε  $x \leq y$  » Τότε μπορούμε να συμπεράνουμε με βεβαιότητα ότι:

- a)  $\sup K \leq \sup L$
- b)  $\inf K \leq \inf L$
- c)  $\sup K \leq \inf L$
- d)  $\inf K \leq \sup L$
- e)  $\inf K \leq \sup K$
- f) Κανένα από τα παραπάνω

### ΘΕΜΑ 4

Δίνονται τα σύνολα  $K = [0, 1)$  και  $L = \{2, 3\}$ . Τότε:

- a)  $K \sim L$
- b)  $L \prec K$

c)  $K \prec L$

d)  $K \cup L \sim K$

e)  $K \cup L \prec L$

f)  $K \cap L \sim L$

g) Τίποτα από τα παραπάνω.

(όπου για δυο σύνολα  $X, Y$  γράφουμε  $X \sim Y$  αν τα σύνολα είναι ισοπληθικά και  $X \prec Y$

αν το  $X$  είναι μικρότερο ή ίσο πληθικά του  $Y$ )

### ΘΕΜΑ 5

a) Δίνονται  $K, L$  δύο μη κενά πεπερασμένα σύνολα. Τότε:

b)  $card(K \cup L) = card(K) + card(L)$

c)  $card(K \times L) = card(K) * card(L)$

d)  $N \times K \sim N \times L$ , όπου  $N$  το σύνολο των φυσικών

e)  $card(K \cup L) \leq card(K) * card(L)$

f)  $card(K \times L) \geq card(K) + card(L)$

g) Τίποτα από τα παραπάνω

### ΘΕΜΑ 6

Δίνεται η εξίσωση  $\sin^2 x + 2 \cos^2 x = \frac{3}{2}$  Τότε το σύνολο όλων των λύσεων της εξίσωσης είναι η εξής οικογένεια:

a)  $x = k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in Z$

b)  $x = k\pi - \frac{\pi}{4}, k \in Z$

c)  $x = k\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, k \in Z$

d)  $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4}, k \in Z$

e) Καμία από τις παραπάνω

### ΘΕΜΑ 7

Δίνεται η λογική πρόταση  $[\sim (r \Rightarrow p)] \wedge (\sim q)$  Αν η πρόταση είναι αληθής τότε:

a) Η  $p$  είναι αληθής, η  $q$  είναι αληθής και η  $r$  είναι αληθής.

b) Η  $p$  είναι αληθής, η  $q$  είναι αληθής και η  $r$  είναι ψευδής.

c) Η  $p$  είναι αληθής, η  $q$  είναι ψευδής και η  $r$  είναι αληθής.

d) Η  $p$  είναι αληθής, η  $q$  είναι ψευδής και η  $r$  είναι ψευδής.

e) Η  $p$  είναι ψευδής, η  $q$  είναι αληθής και η  $r$  είναι αληθής.

f) Η  $p$  είναι ψευδής, η  $q$  είναι αληθής και η  $r$  είναι ψευδής.

g) Η  $p$  είναι ψευδής, η  $q$  είναι ψευδής και η  $r$  είναι αληθής.

h) Η  $p$  είναι ψευδής, η  $q$  είναι ψευδής και η  $r$  είναι ψευδής.

## ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

### ΘΕΜΑ 8

Στο σύνολο  $E = \{1, 2, 3\}$  δίνεται η διμελής σχέση  $\sigma = \{(1, 2), (2, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 3), (1, 1)\}$ .

Να εξετάσετε ( παραθέτοντας πλήρη αιτιολόγηση) αν η  $\sigma$  είναι αυτοπαθής, συμμετρική, αντισυμμετρική και μεταβατική.

### ΘΕΜΑ 9

Δίνεται η συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = (x+2)^2 - 1$ . Να εξηγήσετε γιατί η  $f$  δεν είναι 1-1, γιατί δεν είναι επί. Αν  $B = (-\infty, -2]$  να εξετάσετε αν η  $g = f|_B$  (δηλαδή ο περιορισμός της  $f$  στο σύνολο  $B$ ) είναι 1-1 και αν είναι, να υπολογίσετε την αντίστροφη της συνάρτηση  $g: B \rightarrow g(B)$ . Αν  $A = [-3, 0]$  και  $B = [1, 2]$  να υπολογίσετε τα σύνολα  $f(A)$  και  $f^{-1}(B)$ .

### ΘΕΜΑ 10

Να ορίσετε γραμμική διάταξη  $\leq$  στο σύνολο  $E = \{1, 2, 3, 4\}$  (καταγράφοντας το σύνολο των διατεταγμένων ζευγών που την αποτελούν) η οποία να έχει ελάχιστο στοιχείο 3, μέγιστο στοιχείο το 1 και να ισχύει  $4 \leq 2$  (δηλαδή  $(4, 2) \in \leq$ ).

### ΘΕΜΑ 11

Δίνεται η ακολουθία συνόλων  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  που ορίζεται αναδρομικά ως εξής:  $A_1 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$  και  $A_{n+1} = A_n \setminus P(A_n)$ . Να υπολογίσετε τα σύνολα  $A_2$  και  $A_3$  (Γράψτε και τη διαδικασία εύρεσης, όχι μόνο το αποτέλεσμα)

-Official-